**Universidad Nacional de Ingeniería**
**Facultad de Ingeniería Mecánica**
**Area de Ciencias Básicas y Humanidades**

**P.A. 2007-2**
**21-12-2007**

# Solucionario del Examen Final de Cálculo Numérico (MB535)

**Sin copias ni apuntes (SE ADJUNTA FORMULARIO)**

## Problema 1

a) Realice la función difdivi.m en Matlab que le permita calcular la tabla de diferencias divididas, si se conoce los datos (*x*,*y*) y un numero *m* que indicaría el orden de la mas alta diferencia dividida a evaluarse. Debe comprobarse antes que *m*<=(*n-1)* (*n* indica el numero de puntos de los datos)
function T=difdivi(x,y,m) **(1.5p)**

**Solución**

```
function [T]=dividif1(x,y,m)
n=length(x);
if m<0 ,error('m es un numero entero positivo')
end
if  ( m>n ), error( 'm debe ser <=n')
end
m=m+1;
T=[y'];
for j=2:m              %Algoritmo de diferencias divididas
  for i=1:(n-j+1)
    T(i,j)=(T(i+1,j-1)-T(i,j-1))./(x(i+j-1)-x(i));
  end;
end;
```

b) En el movimiento de un cuerpo de masa de 5kg, calcule la fuerza (N) sobre el cuerpo en t =0.4s con los datos de abajo: (Sugerencia: $F=\frac{dp}{dt}=\frac{d(mv)}{dt}$ )

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| t(s) | 0.0 | 0.2 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.8 |
| v(m/s) | 7 | 7.007 | 7.064 | 7.125 | 7.216 | 7.512 |

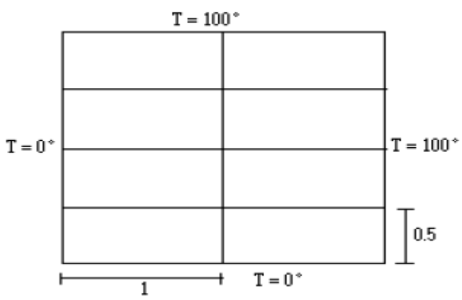
Obtener el resultado con la mejor precisión. **(1.5p)**

**Solución**

Usando la fórmula de 5 puntos F= 2.41666666 N.

c) La distribución de temperatura en estado estacionario bidimensional se define por medio de la ecuación de Laplace:

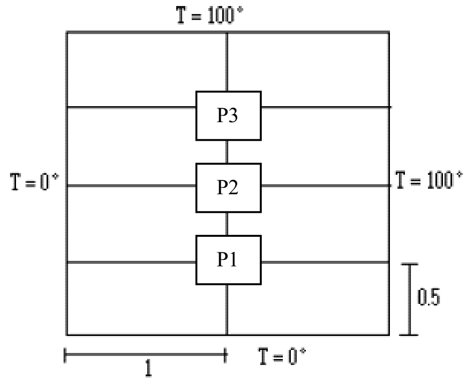
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=0$$




en donde T es la temperatura y, *x* e *y* son las coordenadas.
Obtenga la distribución de la temperatura dentro de la placa plana que se muestra en la siguiente figura:
Plantee el sistema de ecuaciones lineales luego de

aplicar diferencias finitas. **(2.0p)**

**Solución:**




**Nodo P1:**
$10P_1 - 4P_2 = 100$

**Nodo P2:**
$10P_2 - 4P_3 - 4P_1 = 100$

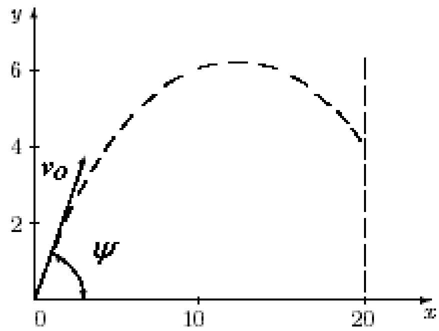
**Nodo P3:**
$-4P_2 + 10P_3 = 100$

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & 0 \\ -4 & 10 & -4 \\ 0 & -4 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 500 \end{pmatrix}$$

**Rpta:**
**P1= 30, P2=50 , P3=70**

**Problema 2**
Un proyectil fue lanzado desde el punto del origen, realizándose las siguientes observaciones:

- Se fotografío el proyectil a 10 metros del punto de lanzamiento y fue determinada su altitud local en: 6 mts.
- Se coloco una barrera a 20 metros del punto de lanzamiento interceptándose a una altitud de 4 mts.
  Con estos 3 puntos disponibles es posible interpolar una trayectoria del proyectil.




a) Determine la trayectoria del proyectil usando algún polinomio interpolante discutido en clase. **(2.0p)**
b) Compare la trayectoria obtenida en a) con la ecuación teórica de la trayectoria y diga si es posible determinar los parámetros de lanzamiento: ángulo $\psi$ con la horizontal, y la velocidad inicial $v_0$. Si fuera posible determine estos parámetros.¿sería necesario realizar un ajuste por mínimos cuadrados? **(1.0p)**

$$y = xtg\psi - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2\cos^2\psi}$$

Donde g=9.86 m/s$^2$
c) Calcule la altitud del proyectil a 5 metros del punto de lanzamiento. **(1.0p)**
d) ¿Como calcularía la validez o grado de confiabilidad de los parámetros $(\psi, v_o)$?**(1.0p)**

**Solución**

a) Tabla de diferencias divididas :

D =

| i | $x$ | $y$ | $f[,]$ | $f[,\ ,]$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | -0.04 |
| 1 | 10 | 6 | 0.6 | |
| 2 | 20 | 4 | -0.2 | |

Polinomio de Newton Interpolante

$P_2(x) = y_0 + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)$

$P_2(x) = 0 + 0.6x + (-0.04)(x)(x - 10)$

Arreglando

$P_2(x) = -0.04x^2\ + x$

b) comparando término a término con la ecuación exacta, obtenemos:

$v_0$=15.7 m/sg

$\psi = a\tan(1)$ ==> 45°

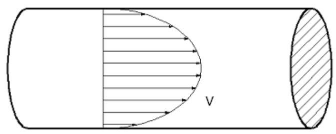
No es necesario realizar ajuste porque en este caso el ajuste es igual a la regresión cuadrática.

c) Interpolando a 5 mt le corresponde una altitud y=4

d) Con el factor de regresión: 1, este resultado es perfecto porque coincide con la fórmula exacta.

**Problema 3**

Sea la distribución de velocidad de un fluido a través de una tubería (ver Figura)




El Caudal $Q$ (volumen de agua que pasa a través de la tubería por unidad de tiempo) puede ser calculada como $Q = \int v\, dA$. Donde $v$ es la velocidad y $A$ es la sección transversal de la tubería.

a) Demostrar que para una tubería circular de radio $r_0$, entonces $Q = 2\pi \int_0^{r_0} v\, r\, dr$. Donde $r$ es la distancia radial medida desde el centro de la tubería y donde $r_0$ es el radio de la tubería. **(2.0p)**

b) Si la distribución de velocidad es dada por: $v = 2\left(1 - \frac{r}{r_0}\right)^{1/6}$, donde $r_0 = 2$. Calcule el caudal $Q$ mediante la fórmula de Newton-Cotes cerrada de cuarto grado con h=1/8. **(2.0p)**

c) Muestre el número de dígitos significativos exactos si el valor real de la integral es $\frac{576\pi}{91}$. Comente sus resultados. **(1.0p)**

**Solución**

a)

$A = \pi r^2$

$dA = 2\pi r\, dr$

$Q = \int v\, 2\pi r\, dr = Q = 2\pi \int v\; r\, dr$

$Q = 2\pi \int_0^{r_O} v\, r\, dr$

b)

$Q = 4\pi \int_0^2 r \left(1 - \frac{r}{2}\right)^{1/6} dr$

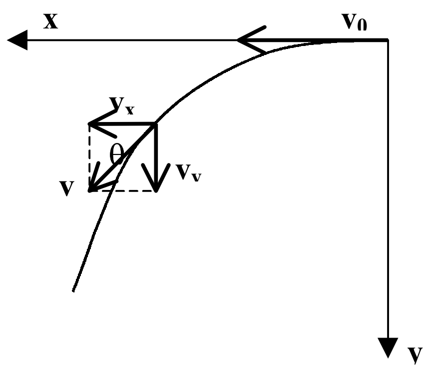
I = 19.4907

c)

Ie= 19.8852

Existen 2 dígitos significativos exactos.

**Problema 4**




Un paracaidista con peso, W = 784N salta de un avión que vuela horizontalmente con velocidad inicial $v_0$=171m/s, las fuerzas consideradas que actúan sobre el paracaidista son la fuerza de arrastre aerodinámico y la fuerza debido a la aceleración gravitacional.

La fuerza de arrastre está dado por: $F_a = Kv^2$,

El coeficiente de resistencia $K$ es de aproximadamente 0.2630 N y la aceleración de la gravedad 9.8m/s$^2$

a) Demuestre que el problema se puede modelar mediante el sistema de ecuaciones:

$$\frac{W}{g}\frac{dv_x}{dt} = -Kvv_x \quad ; \quad \frac{W}{g}\frac{dv_y}{dt} = W - Kvv_y$$

donde: $v_x$ = componente de la velocidade $v$ en la dirección $x$

$v_y$ = componente de la velocidade $v$ en la dirección $y$ **(2.0p)**

b) Determine la velocidad antes de abrir el paracaídas en el instante t = 2 segundos con intervalos de 1 segundo, usando el método de Heum. **(3.0p)**

**Solución**

Por la segunda Ley de Newton:

Dirección de $x$:

$$\frac{W}{g}\frac{dv_x}{dt} = -Kv^2 \cos\theta$$

Dirección de y

$$\frac{W}{g}\frac{dv_y}{dt} = W - Kv^2 \sin\theta$$

Donde:

$v_x$ = componente de la velocidade $v$ en la dirección $x$
$v_y$ = componente de la velocidade $v$ em la dirección $y$

Observando que:

$\cos\theta = \dfrac{v_x}{v}$, $sin\theta = \dfrac{v_y}{v}$ y $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$

tenemos:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{g}{W} \times (-Kvv_x) \\ \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{g}{W}(W - Kvv_y) \end{cases}$$

Condiciones iniciales: *t=0*

$$\begin{cases} v_x(0) = v_0 \\ v_y(0) = 0 \end{cases}$$

$V_0$ =171

Por Heun:
Iteración 1:
Vx(1)=113.6168
Vy(1)=8.5839

Iteración 2:
Vx(2)= 83.8358
Vy(2)=14.9631

**Los Profesores**